


1. Hallar la altura (h) y el radio (u) en D = {(h, u)$\in\mathbb{R}^2$: h$\geq$1, b$\geq$1, $h^2 + u^2 \leq 16$} de manera que al área del cono (dada por $\pi u\sqrt{h^2+u^2}$) alcance valores extremos.



De las muchas resoluciones que este ejercicio permite, escogemos una que, con no ser la más eficiente, muestra los cuidados que requiere el problema de extremar el campo f: D $\to\mathbb{R}$ tal que $f(h,u) = \pi\, u\sqrt{h^2+u^2}$. En primer lugar, en el interior de D (esto es en D* = {(h, u)$\in\mathbb{R}^2$: h>1, b>1, $h^2 + u^2 < 16$}), el campo no alcanza extremos, puesto que en ningún punto de D* es nula la derivada parcial $f_h(h, u) = \pi\, u\, h\, (h^2+u^2)^{-½}$, pues ello exigiría que u o h fueran nulos, lo que es imposible en D*. De modo que los extremos de f se hallan en la frontera $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, siendo C_1 el segmento vertical AC = {(h, u)$\in\mathbb{R}^2$: h = 1, 1$\leq$u$\leq\sqrt{15}$}, C_2 el segmento horizontal AB = {(h, u)$\in\mathbb{R}^2$: u = 1, 1$\leq$h$\leq\sqrt{15}$}, C_3 el arco de circunferencia BC = {(h, u)$\in\mathbb{R}^2$: $h^2 + u^2 = 16$, 1$\leq$h$\leq\sqrt{15}$, 1$\leq$u$\leq\sqrt{15}$}. Ahora, si f_1 es la función escalar dada por la restricción de f a C_1, esto es si f_1: [1, $\sqrt{15}$]$\to\mathbb{R}$ tal que $f_1(t) = \pi\, t\, (1+t^2)^{½}$, es $f_1'(t) = \pi\,(1 + 2t^2)\,(1+t^2)^{-½}$ que nunca es nula en el abierto (1, $\sqrt{15}$), de modo que el máximo de f_1 se alcanza en t = $\sqrt{15}$ y el mínimo en t = 1 (el máximo es $4\pi\sqrt{15}$, el mínimo $4\pi\sqrt{2}$). Si f_2 es la función escalar dada por la restricción de f a C_2, esto es si f_2: [1, $\sqrt{15}$]$\to\mathbb{R}$ tal que $f_2(t) = \pi\,(t^2+1)^{½}$, es $f_1'(t) = \pi\, t\, (1+t^2)^{-½}$ que nunca es nula en el abierto (1, $\sqrt{15}$), de modo que el máximo de f_2 se alcanza en t = $\sqrt{15}$ y el mínimo en t = 1 (el máximo es 4π, el mínimo $\pi\sqrt{2}$). Si f_3 es la función escalar dada por la restricción de f a C_3, esto es si f_3: [1, $\sqrt{15}$]$\to\mathbb{R}$ tal que $f_1(t) = 4\pi\, t$ es $f_3'(t) = 4\pi$ que nunca es nula en el abierto (1, $\sqrt{15}$), de modo que el máximo de f_3 se alcanza en t = $\sqrt{15}$ y el mínimo en t = 1 (el máximo es $4\pi\sqrt{15}$, el mínimo 4π). De la discusión anterior, resulta que el campo escalar f alcanza su máximo en el punto C = (1, $\sqrt{15}$), y el mínimo en A = (1, 1), de manera que, respondiendo a la pregunta, tomando h = u = 1 se tiene el área mínima ($\pi\sqrt{2}$), y tomando h = 1, u = $\sqrt{15}$, se obtiene el área máxima ($4\pi\sqrt{15}$).

Observaciones. La noción central de este ejercicio es la necesaria existencia de extremos de una función continua definida en un compacto. Observar que tanto el campo escalar f como las funciones escalares f_1, f_2, f_3 están definidas en un conjunto acotado y cerrado, y son todas continuas en sus correspondientes dominios (de hecho, son de clase C^∞). El procedimiento en sí consistió en la investigación de los valores extremos en el interior del compacto (utilizando la condición de anulación de la derivada como necesaria), y luego en su frontera. Damos por sabido que el problema de extremar una función continua siempre tiene solución (esto es que la función alcanza su valor máximo (mínimo) en algún punto del compacto), y que si tales puntos son interiores y la función es allí diferenciable, entonces debe anularse la derivada primera. Como el (los) extremos pueden alcanzarse en la frontera, deben controlarse allí sus valores. Para revisar estas cuestiones, puede leerse el muy preciso texto de (Browder 1996, §3.2, Theorem 3.14, 59) y también (Lang 1990, §2, 142), además de los textos clásicos de (Apostol 1967, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1969).

2. Sea C = Im($\bar{\gamma}$), siendo $\bar{\gamma}$: [0, 2] $\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (t,\ t^2, 2t)$. Expresar C como intersección de dos superficies y graficarlas. Calcular la circulación a lo largo de C del campo vectorial $\bar{f}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}$ (x, y, z) = (2xy, x, 3yz), indicando el punto inicial y el punto final del recorrido.

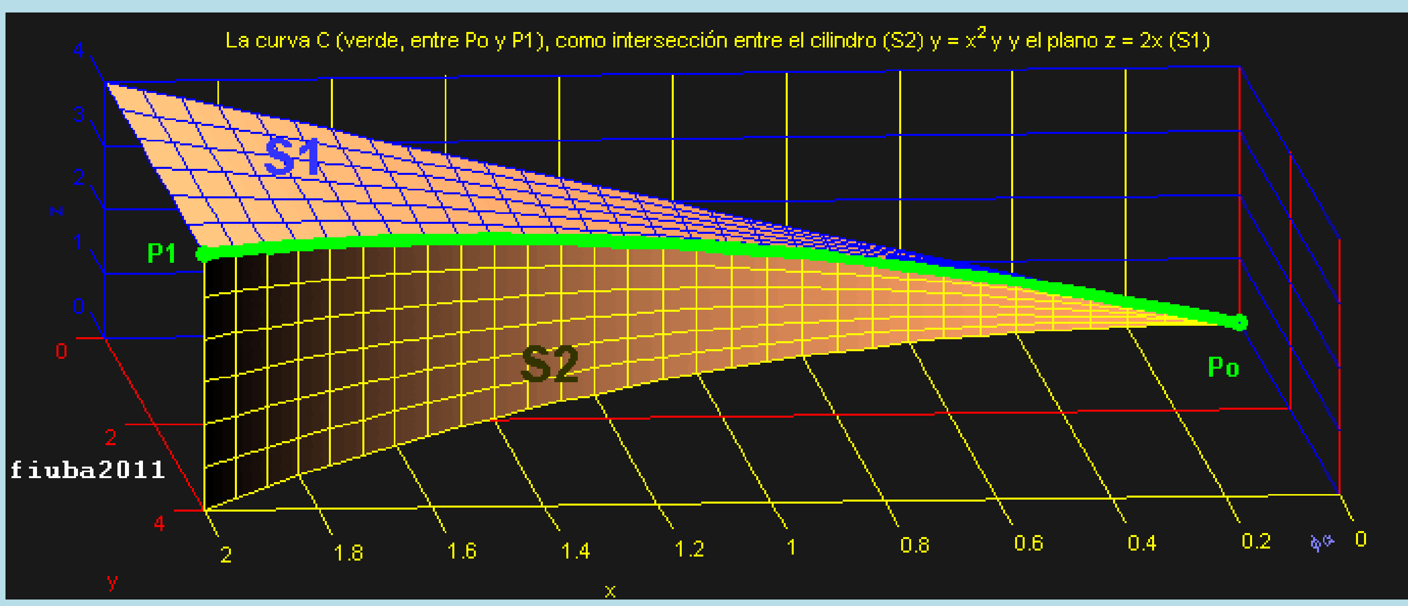
Desde el punto de vista operativo, la resolución de este ejercicio no requiere más que una línea, puesto que, siendo $\bar{\gamma}$ regular en su dominio [pues $\bar{\gamma}'(t) = (1,\ 2t, 2)$ es obviamente nunca nula), a la vez que $\bar{f}$ es $C^\infty(\mathbb{R}^3)$], la circulación pedida a lo largo de C entre $P_0 = \bar{\gamma}(0) = (0, 0, 0)$ y $P_1 = \bar{\gamma}(0) = (2, 4, 4)$ está dada por el siguiente cálculo.

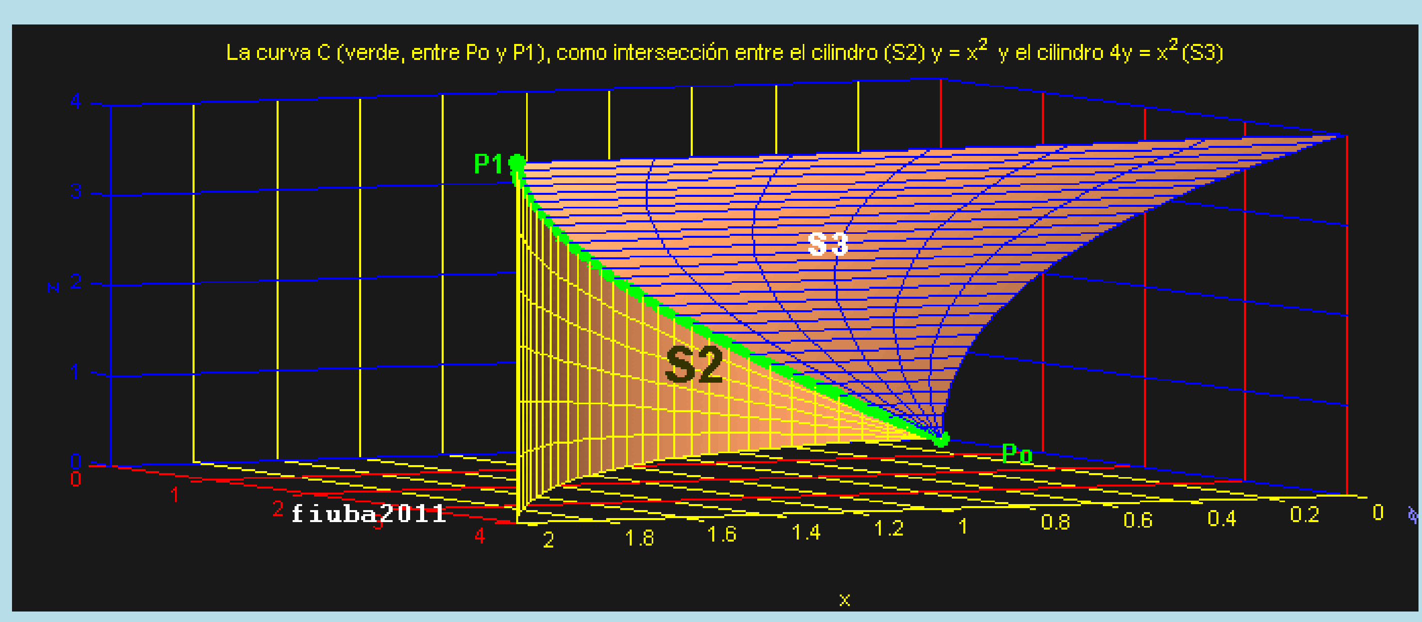
$$\int_C \bar{f}\cdot\bar{dl} = \int_0^2 \bar{f}(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t)dt = \int_0^2 (2t^3, t, 6t^3)\cdot(1, 2t, 2)dt = \int_0^2 (14t^3 + 2t^2)dt = 56 + \frac{8}{3} = \frac{184}{3}$$

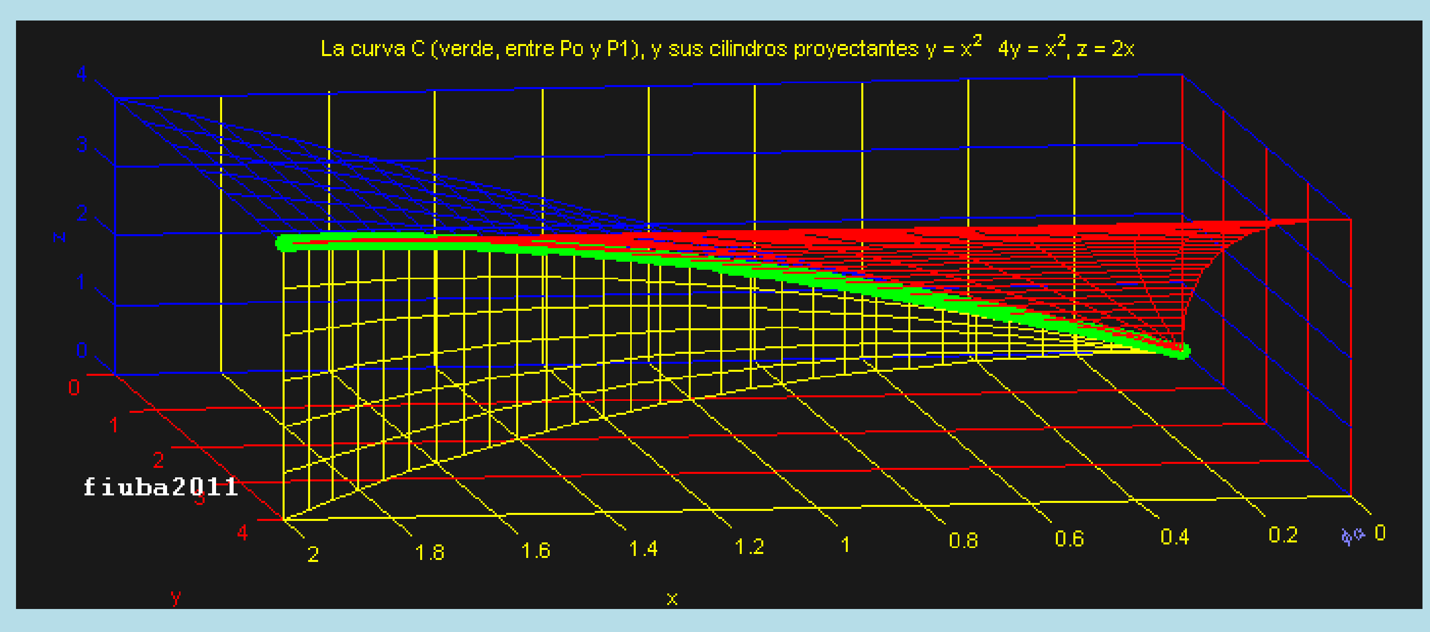
La curva C se puede escribir como la intersección de un par de superficies de muy diversas maneras, pero son de particular importancia las superficies cilíndricas cuyas trazas sobre los planos coordenados permiten apreciar la proyección de C sobre ellos. Haciendo, por ejemplo S_1 = {(x, y, z)$\in\mathbb{R}^3$: y = x^2, 0 $\leq$ x $\leq$ 2, 0 $\leq$ z $\leq$ 2x}, S_3 = {(x, y, z)$\in\mathbb{R}^3$: z = 2y, 0 $\leq$ y $\leq$ x^2, 0 $\leq$ x $\leq$ 2}, S_3 = {(x, y, z)$\in\mathbb{R}^3$: 4y = z^2, 0 $\leq$ z $\leq$ 4, 0 $\leq$ x $\leq$ ½ z}, puede escribirse tanto que $C = S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3$, y algunas de estas intersecciones se grafican, para abundar, en las tres figuras de la página siguiente.

Observación. Existen infinitas formas de escribir C como intersección de un par de superficies [por ejemplo, C es la intersección de cualquiera de las anteriores superficies con el paraboloide hiperbólico de ecuación $y = z^2 - 3x^2$, como se comprueba sin dificultad]. Sin embargo son muy especiales los cilindros anteriores, que se conocen como *cilindros proyectantes*, y que permitieron por primera vez el tratamiento sistemático de las curvas en el espacio tridimensional hacia principios del siglo XVIII (~1731: Investigación de las curvas de doble curvatura); las curvas fueron llamadas *de doble curvatura* por Clairaut [ni Descartes ni Fermat introdujeron métodos de resolución de problemas en 3D]. Clairaut proyectaba ortogonalmente cada punto de la curva en dos planos coordenados mutuamente perpendiculares, generando así los cilindros proyectantes.





La curva C (verde, entre Po y P1), como intersección entre el cilindro (S2) y = x2 y y el plano z = 2x (S1)
S1
S2
P1
Po
fiuba2011
x
y
z


La curva C (verde, entre Po y P1), como intersección entre el cilindro (S2) y = x2 y el cilindro 4y = x2 (S3)
S3
S2
P1
Po
fiuba2011
x
z


La curva C (verde, entre Po y P1), y sus cilindros proyectantes y = x2 4y = x2, z = 2x
fiuba2011
x
y
z




3. Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ una función escalar cuadrática tal que $f''(0) = 2$, y el campo escalar $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^2+y^2-2z^2)$. Determinar el flujo del campo vectorial ∇g sobre la superficie S dada por la esfera unitaria centrada en origen, orientada con normal saliente.

En primer lugar, conviene ver que $f''(t) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (siendo f es cuadrática, f'' debe ser una función constante). Definimos el campo escalar $t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $t(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2+y^2-2z^2$. En tales condiciones, es $g = f \circ t$. Ahora bien, dadas las hipótesis, es claro que el campo ∇g es $C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, y que S es una superficie cerrada, para la que existe una parametrización regular en casi todas partes, y está orientada de manera que puede aplicarse el teorema de Gauss (ver observación), y en lugar de calcular el flujo a través de S, puede integrarse la divergencia de ∇g en la bola $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Pero la divergencia de ∇g es el laplaciano $\nabla^2 g$. De este modo, tenemos que $\iint_S (\nabla g) \cdot \breve{n}\, dS = \iiint_M (\nabla^2 g)\, dV$. Calculamos entonces el laplaciano de g en un punto cualquiera $X = (x, y, z)$: $g_x(X) = 2x\, f'(t)$, $g_y(X) = 2y\, f'(t)$, $g_z(X) = -4z\, f'(t)$, $g_{xx}(X) = 4x^2 f''(t)+2 f'(t)$, $g_{yy}(X) = 4y^2 f''(t)+2 f'(t)$, $g_{zz}(X) = 16z^2 f''(t) - 4 f'(t)$, de modo que $\nabla^2 g(X) = g_{xx}(X) + g_{yy}(X) + g_{zz}(X) = 4 f''(t)\,(x^2 + y^2 + 4z^2) + (2 + 2 - 4)\, f'(t) = 4 f''(t)\,(x^2 + y^2 + 4z^2) = 8\,(x^2 + y^2 + 4z^2)$. Luego $\iiint_M (\nabla^2 g)\, dV = 8 \iiint_M (x^2 + y^2 + 4z^2)\, dV = 8\left[\iiint_M x^2 dV + \iiint_M y^2 dV + 4 \iiint_M z^2 dV\right] = 48 \iiint_M z^2 dV = 48 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^4 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 48 \frac{4\pi}{15} = \frac{192\pi}{15}$. De esta manera, el flujo pedido es $\frac{192\pi}{15}$.

✍ Observación. El procedimiento del cálculo de las tres integrales quedó simplificado dado que las tres son iguales $\iiint_M x^2 dV = \iiint_M y^2 dV = \iiint_M z^2 dV$, lo que debería ser evidente. Las nociones principales involucradas en este ejercicio incluyen la regla de la cadena [entre los muchos textos que la exponen, puede citarse una presentación escueta en el clásico (Apostol, 321-328) y una muy detallada en (Curtis 1979, 273-292)] y el teorema de Gauss [para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, de clase C^1 en un abierto simplemente conexo que contiene a una superficie cerrada S regular por partes, simple y orientada con normal saliente, el flujo del campo a través de S coincide con la integral triple de su divergencia en la región M de la que S es frontera. Las hipótesis pueden debilitarse, y la dimensión del espacio ampliarse, resultando teoremas más generales; puede verse una presentación introductoria en (Lang 1990, 442-458)].

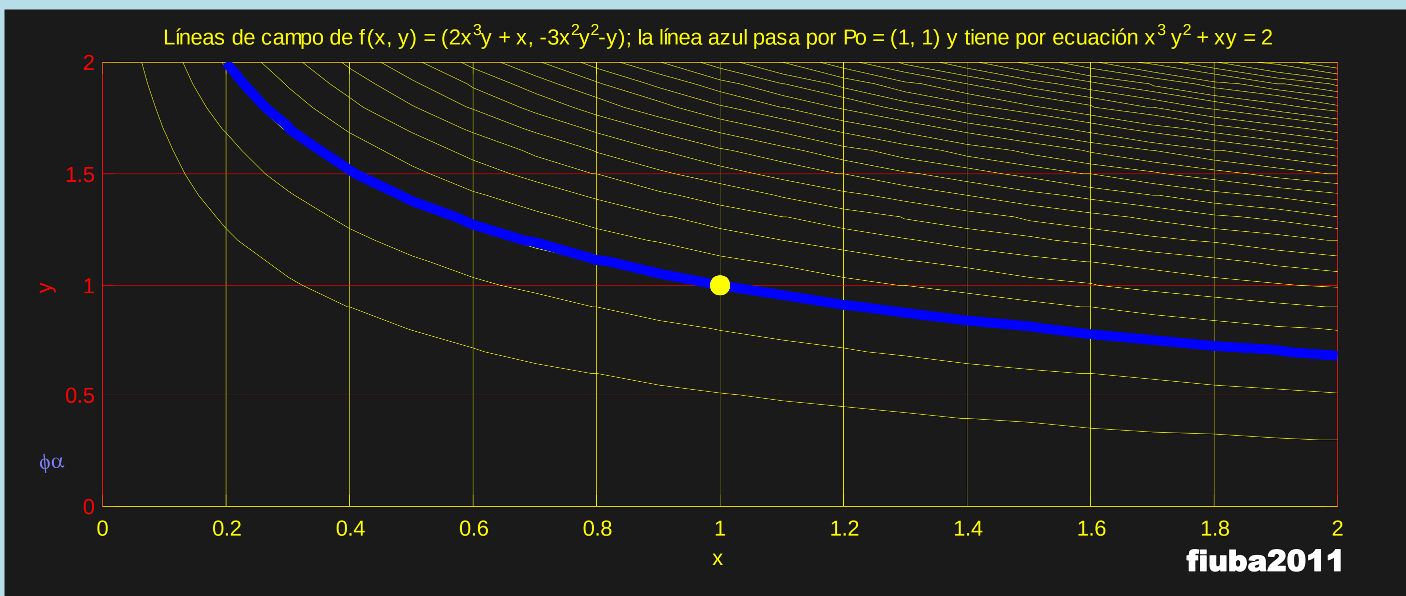
4. Dado el campo vectorial $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f}(x, y) = (2x^3y + x, -3x^2y^2 - y)$, determinar la línea de campo que pasa por $P_0 = (1, 1)$ y la recta ortogonal en P_0 a esa misma línea.

Para la recta normal no se necesita la línea de campo, dado que se sabe que debe ser ortogonal a $\bar{f}(P_0) = (3, -4)$, de modo que tomando $\bar{v} = (4, 3)$ podemos escribir de inmediato su ecuación: $X = P_0 + \lambda\, \bar{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Las líneas de campo son las curvas integrales de la ecuación diferencial exacta $(3x^2y^2+y)dx + (2x^3y + x)\, dy = 0$, ya que es evidente que puede escribirse como $d\varphi(x, y) = 0$, siendo φ el campo escalar $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = x^3y^2 + xy$. Siendo $\mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo, de $d\varphi(x, y) = 0$ se sigue necesariamente* que $\varphi(x, y) = k$, con $k \in \mathbb{R}$. En particular, pasa por P_0 la curva $\varphi(x, y) = \varphi(P_0) = 2$, de modo que la línea de fuerza pedida es $x^3y^2 + xy = 2$. En la figura de la página siguiente se muestran las líneas de campo y, en particular, la que acierta a pasar por el punto P_0.

✍ Observaciones. Este ejercicio se resuelve con el conocimiento de la definición de líneas de campo y el reconocimiento de una ecuación diferencial exacta. La curva C parametrizada por la función vectorial $\bar{\gamma}$, es una línea de flujo del campo vectorial $\bar{f}$ en el punto $P = \bar{\gamma}(t)$ sii $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$, lo que puede verse, por ejemplo, en (Marsden y Tromba 1991, 216). Una definición menos formal y más sugerente en (Santaló 1993, §14, 96-98), con la distinción entre líneas de campo y de corriente, en este ejercicio coincidentes al tratarse de un campo estacionario. Michael Faraday introdujo (siglo XIX) el concepto que llamó 'líneas de fuerza' de un modo que podría expresarse como *una línea imaginaria dibujada de tal manera que su dirección en cualquier punto es la del campo en ese punto*. James Clerk Mawell las adoptó y dotó de rigor matemático de un modo que sorprendió al mismo Faraday, que le pregunta a Maxwell algo fastidiado *¿no puede expresarlas en el lenguaje común tan clara y completamente como por medio de expresiones matemáticas?* Ver *Faraday a Maxwell, 13 nov de 1857* en *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell* dirigida por P. Harman, Cambridge, 1990, p. 548. Para una discusión epistemológica e histórica del significado de la pregunta de Faraday ver (Gingras 2006, 109-112). Para algunos de los significados clásicos de las líneas de campo en Física elemental, puede verse (Reitz, Milford y Christy 1986, 31, 220); en la ingeniería civil se presentan en diversas variantes tales como líneas de escurrimiento, líneas de tensiones.
Para las ecuaciones diferenciales exactas, entre los muchos textos de ecuaciones diferenciales, puede verse en (Braun 1990, 57-64, Zill 2007, 50-58, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1965, 161-163, Birkhoff y Rota 1989, 15-16, Roxin y Spinadel 1976, 13-14). En un texto clásico como (Kreider, Kuller y Ostberg 1973, 340-348) se tiene una presentación muy prolija, y una abundancia de importantes observaciones en el apartado de ejercicios. Una sucinta pero completa presentación en un texto orientado hacia la ingeniería en (Kreyszig 1993, 23-30).

* ¿Se sigue necesariamente que la función φ es constante si se quita el requisito de que la región en la que se anula idénticamente su diferencial es simplemente conexa? La respuesta es no: dar un ejemplo de un campo escalar C^{∞} en un dominio D abierto conexo en $\mathbb{R}^2$ cuyo diferencial sea nulo en todos los puntos de D y que, sin embargo, no sea constante.

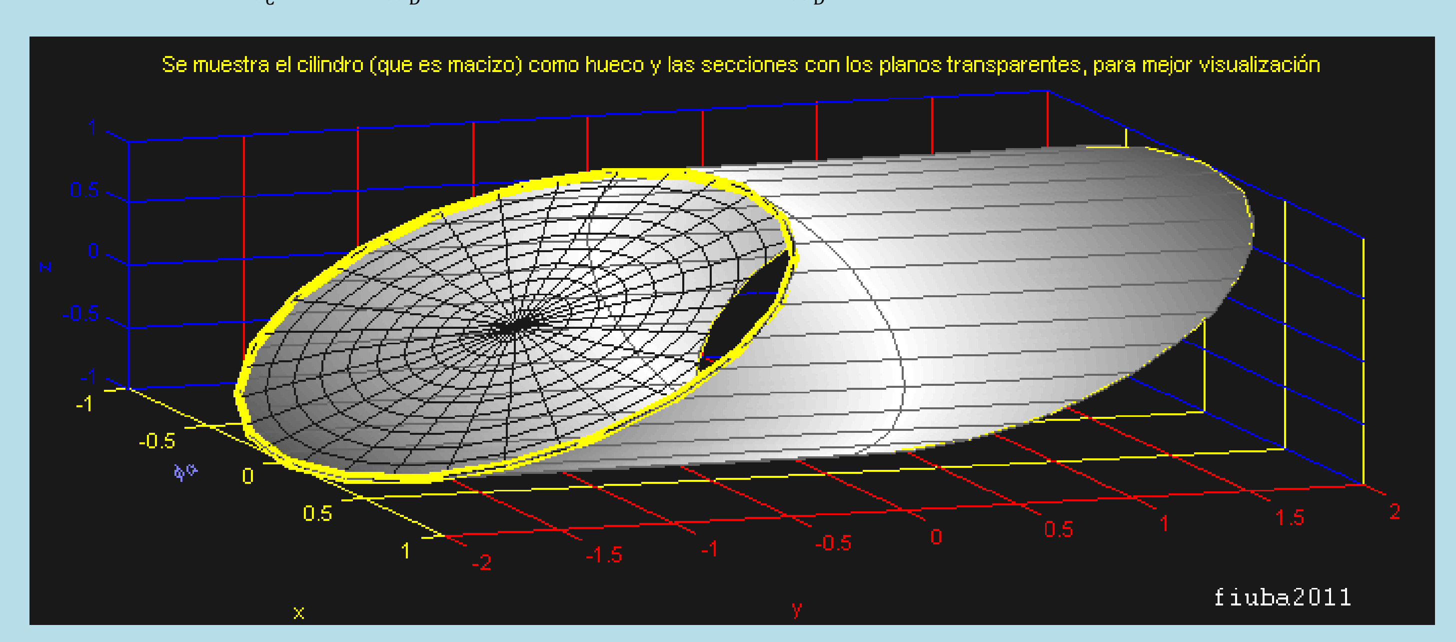




5. Sea D⊂ $\mathbb{R}^2$ la región dada por la proyección sobre el plano xy del macizo M = {(x, y, z)∈$\mathbb{R}^3$: $x^2 + z^2 \leq 1$, $-1 \leq y-z \leq 1$}. Calcular la circulación del campo vectorial $\bar{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f}$ (x, y) = (y^2, 2xy + 3x) a lo largo de ∂D, indicando la orientación adoptada. Graficar las conjuntos D y M.

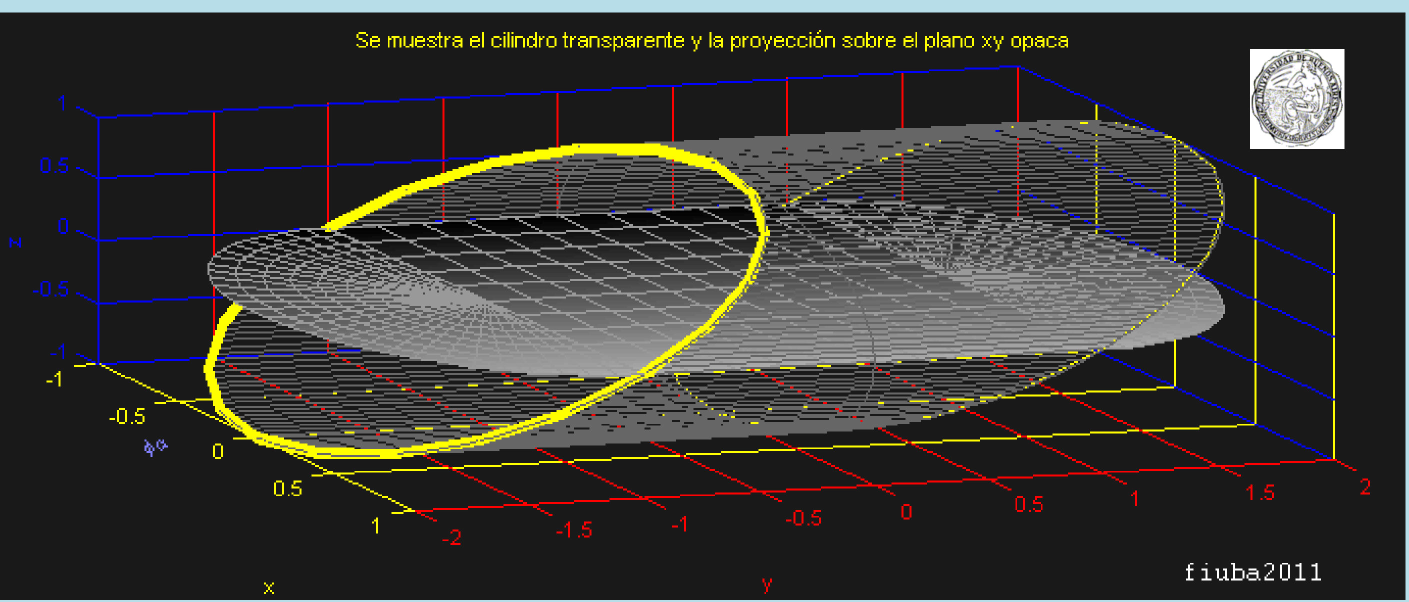
Una vez determinado que D = {(x, y)∈$\mathbb{R}^2$: $-1 \leq y \leq 1$, $-1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}$}, y orientando C =∂D de modo que al circular por C, D se mantenga a su izquierda, se tiene una curva cerrada regular por partes (se admite recorrida una vez), mientras que el campo vectorial $\bar{f}$ = (P, Q) es claramente $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, de modo que se dan las condiciones para aplicar el teorema de Green†. Como por otra parte es $Q_x(x, y) - P_y(x, y) = 2y + 3 - 2y = 3$, resulta que la circulación pedida es el triple del área de D. El área de D es la suma del área de un cuadrado de lado 2 (esto es, 4) y de dos semicírculos de radio 1 (esto es, π). De modo que la circulación pedida es $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{l} = 3\,(4+\pi)$. La siguiente línea resume el párrafo:

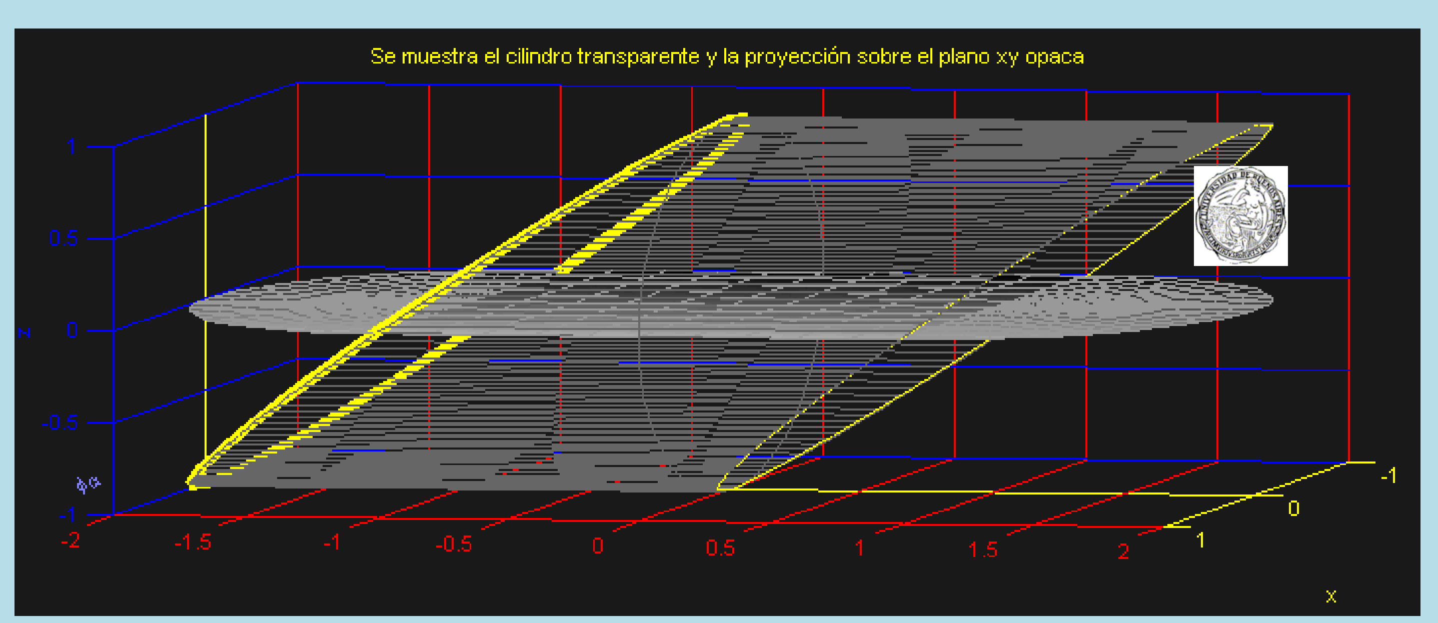
$$\int_C \bar{f}\cdot d\bar{l} = \iint_D [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\,dx\,dy = 3\iint_D dx\,dy = 3\,\text{área}(D) = 3\,(4+\pi)$$



† ¿Qué dice exactamente el teorema? Enunciarlo y explicar por qué se afirma que es aplicable a este caso (esto es mostrar que los objetos que intervienen en el teorema satisfacen sus hipótesis). Ver cualquiera (si todos, mucho mejor) de los siguientes libros de texto. (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §88.6, 484-486, Santaló 1993, §20-21, Marsden y Tromba 1991, §8.1,491-496, Kurtis 1979, §9.6, 419-426). El teorema de Green también se conoce como Fórmula de Riemann. Una muy clara presentación en (Apostol 1980, §11.19, 462-473), y su correspondiente extensión a recintos múltiplemente conexos en (Apostol 1980, §11.23, 473 ss.). En (Kreyszig 1993, 522-529), texto escrito para ingeniería, se encuentra una brevísima y completa presentación del teorema, con ejemplos y observaciones que amplían las perspectivas desde las que se puede considerar el significado del teorema.





Observaciones. Posiblemente convenga decir que una proporción bastante alta de los alumnos encontró en este ejercicio una dificultad, de naturaleza puramente geométrica, que no pudo resolver: la determinación del conjunto D. En realidad, para dibujarlo bastaba el conocido hecho de que el plano corta al cilindro según una elipse, cuya proyección sobre el plano xy es una circunferencia. Examinar con atención las tres figuras anteriores puede ayudar. También, la manipulación (inteligente) de los recursos digitales puestos a disposición en el aula virtual.

Bibliografía mencionada

Apostol, Tom. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty]. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.

Birkhoff, Garret, y Gian-Carlo Rota. *Ordinary Differential Equations.* Cuarta edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Braun, Martin. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Primera edición en español [Original 1983, Differential Equations and Their Applications]. Traducido por Ignacio Barradas Bribiesca. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

Browder, Andrew. *Mathematical Analysis. An introduction.* Primera edición. New York: Springer Verlag, 1996.

Curtis, Philip. *Cálculo de varias variables con álgebra lineal.* Primera edición. Primera reimpresión [Original 1970: Multivariate Calculus with Linear Algebra]. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas y Olimpia Mourut de Montppellier (revisora). México D. F.: Limusa, 1979.

Gingras, Yves. «Matematismo y exclusión: socioanálisis de la formación de las ciudades científicas.» En *Bachelard y la epistemología francesa*, de Jean Jacques Wunenburger, traducido por María de los Ángeles Serrano, 87-114. Buenos Aires: Nueva Visión, 2006.




Kreider, Donald, Robert Kuller, y Donald Ostberg. *Ecuaciones diferenciales.* Primera edición. Traducido por Federico Velasco Coba y Jorge Ludlow. New York: Fondo educativo interamericano, 1973.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics.* Séptima edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1993.

Kurtis, Philip. *Cálculo de varias Variables con álgebra lineal.* Primera edición, primera reimpresión. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas. México D.F.: Limusa, 1979.

Lang, Serge. *Introducción al Análisis Matemático.* Primera edición. [Original 1968, Undergrauate Analysis]. Traducido por Manuel López Mateos y Mario. Muñoz Mella. Wimington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana., 1990.

Marsden, Jerrold E., y Anthony, J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Reitz, J., F. Milford, y R. Christy. *Fundamentos de la teoría electrommagnética.* Segunda edición. Traducido por Carlos Martínez Ávila y Patricio Carranza. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

—. *Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable.* Octava edición. Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.

—. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.

Roxin, Emilio, y Vera Spinadel. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Segunda edición corregida y ampliada. Buenos Aires: Eudeba, 1976.

Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.

Zill, Dennis. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. Traducido por Eduardo Ojeda Peña y ÁLvaro Cofré Mata. México: Thomson, 2007.

